

BASI ORTONORMALI, MATRICI ORTOGONALI

01. Come si può facilmente calcolare, i vettori di $\mathcal{C}$ sono combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}$. Infatti si ha:
 $(1, 2, 1) = 1 \cdot (1, 0, 2) + 1 \cdot (0, 2, -1)$ $(1, 4, 0) = 1 \cdot (1, 0, 2) + 2 \cdot (0, 2, -1)$.

Ortonormalizziamo le due basi col metodo di Gram-Schmidt:

$$(1, 0, 2) \longrightarrow (1, 0, 2)/\sqrt{5}$$

$$(0, 2, -1) \longrightarrow (0, 2, -1) - \left((1, 0, 2)/\sqrt{5} \cdot (0, 2, -1) \right) (1, 0, 2)/\sqrt{5} = (2/5, 2, -1/5)$$

$$(2/5, 2, -1/5) \longrightarrow (2, 10, -1)/\sqrt{105}$$

$$(1, 2, 1) \longrightarrow (1, 2, 1)/\sqrt{6}$$

$$(1, 4, 0) \longrightarrow (1, 4, 0) - \left((1, 2, 1)/\sqrt{6} \cdot (1, 4, 0) \right) (1, 2, 1)/\sqrt{6} = (-1/2, 1, -3/2)$$

$$(-1/2, 1, -3/2) \longrightarrow (-1, 2, -3)/\sqrt{14}$$

Le basi ortonormalizzate sono $\mathcal{B}_1 : \frac{(1, 0, 2)}{\sqrt{5}}, \frac{(2, 10, -1)}{\sqrt{105}}$ e $\mathcal{C}_1 : \frac{(1, 2, 1)}{\sqrt{6}}, \frac{(-1, 2, -3)}{\sqrt{14}}$.

02. Cerchiamo due vettori linearmente indipendenti ortogonali a v_1 e v_2 , cioè risolviamo il sistema in $v = (x, y, z, t)$

$$\begin{cases} v \cdot (1, 0, -1, 1) = 0 \\ v \cdot (1, 1, 1, 0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - z + t = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - z + t = 0 \\ y + 2z - t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = z - t \\ y = -2z + t \end{cases}$$

Due soluzioni linearmente indipendenti sono: $(-1, 1, 0, 1)$, $(1, -2, 1, 0)$. Questi potrebbero essere v_3 e v_4 , dato che sono ortogonali a v_1 e a v_2 . Occorre però che siano tra loro ortogonali, quindi poniamo $v_3 = (-1, 1, 0, 1)$ e cerchiamo un vettore di $L\{v_3, v_4\}$ ortogonale a v_3 .

Un vettore di $L\{v_3, v_4\}$ è del tipo $a(-1, 1, 0, 1) + b(1, -2, 1, 0) = (-a + b, a - 2b, a, b)$. Perché sia ortogonale a v_3 occorre che $(-a + b, a - 2b, a, b) \cdot (-1, 1, 0, 1) = 0$, cioè che $2a - 2b = 0$. Per esempio, per $a = 1$ e $b = 1$, si ottiene $v_4 = (0, -1, 1, 1)$.

03. La prima colonna ha modulo 1, quindi può far parte di una matrice ortogonale. La seconda colonna deve essere ortogonale alla prima cioè si deve avere $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 0$ e si vede subito che il numero mancante deve essere $-2/3$.

In questo modo anche la seconda colonna ha modulo 1, quindi può far parte di una matrice ortogonale. Per quanto riguarda l'ultima colonna, dato che la matrice è 3×3 , è sufficiente procedere per via

geometrica e calcolare $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. In conclusione:

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Dato che } P \text{ è ortogonale,} \\ \text{allora } P^{-1} \text{ è semplicemente} \\ \text{la trasposta di } P. \end{array} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

04. Poniamo, per semplicità: $a = a_{31}$ $b = a_{22}$ $c = a_{32}$

La prima colonna deve avere modulo 1, quindi si deve avere

$$4/9 + 4/9 + a^2 = 1 \text{ e cioè } a = \pm 1/3.$$

Anche la seconda colonna deve avere modulo 1, quindi si deve avere

$$4/9 + b^2 + c^2 = 1 \text{ e cioè } b^2 + c^2 = 5/9.$$

Ma, la seconda colonna deve essere ortogonale alla prima quindi si deve avere

$$(-2/3)(2/3) + (2/3)b + ac = 0 \text{ e cioè } 2b + 3ac = 4/3.$$

Risolviamo il sistema di secondo grado in b, c delle due equazioni sottolineate. Dato che avrà due soluzioni, per evitare confusione tra i vari simboli $\pm$, conviene risolverlo due volte: una volta per $a = 1/3$ e una volta per $a = -1/3$.

$$\bullet a = 1/3. \quad \text{Si trova: } b = 1/3 \quad ; \quad c = 2/3 \quad \text{e} \quad b = 11/15 \quad ; \quad c = -2/15$$

$$\bullet a = -1/3. \quad \text{Si trova: } b = 1/3 \quad ; \quad c = -2/3 \quad \text{e} \quad b = 11/15 \quad ; \quad c = 2/15$$

Quindi abbiamo quattro possibilità per completare la prima e la seconda colonna.

Per quanto riguarda la terza, dato che deve avere modulo 1 e deve essere ortogonale alle prime due, ci sono ogni volta due possibilità che si possono trovare per esempio col prodotto vettoriale delle prime due colonne.

$$P = \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & * \\ 2/3 & b & * \\ a & c & * \end{pmatrix}$$

Per esempio, per il caso $a = 1/3$; $b = 1/3$; $c = 2/3$ eseguiamo $(-2/3, 2/3, 1/3) \wedge (2/3, 1/3, 2/3) = (1/3, 2/3, -2/3)$, quindi la terza colonna può essere $[1/3 \ 2/3 \ -2/3]^T$ oppure la sua opposta $[-1/3 \ -2/3 \ 2/3]^T$.

In definitiva ci sono otto possibili matrici. Eseguiti i conti, le altre sei sono:

$$\begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & \mp 1/3 \\ 2/3 & 11/15 & \pm 2/15 \\ 1/3 & -2/15 & \mp 14/15 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & \mp 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & \mp 2/3 \\ -1/3 & -2/3 & \mp 2/3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & \pm 1/3 \\ 2/3 & 11/15 & \mp 2/15 \\ -1/3 & 2/15 & \mp 14/15 \end{pmatrix}$$

05. a. La dimensione di V è evidentemente 2. Per trovare una base ortogonale per V si può partire da un suo vettore qualunque per esempio $(1, 0, -1)$ e trovarne un altro (x, y, z) che soddisfi (oltre l'equazione di V : $x - 2y + z = 0$) la condizione $(x, y, z) \cdot (1, 0, -1) = 0$ cioè $x - z = 0$. Per esempio si trova $(1, 1, 1)$. La base così ottenuta è ortogonale; per renderla ortonormale basta normalizzare ciascun vettore e si ha la base ortonormale: $(1, 0, -1)/\sqrt{2}$, $(1, 1, 1)/\sqrt{3}$.
- b. La dimensione di W è evidentemente 2. Per trovare una base ortogonale per W si può iterare il procedimento già seguito per V e partendo dal vettore $(1, 0, 0, 1)$ determinare successivamente un qualunque vettore ortogonale a $(1, 0, 0, 1)$, per esempio $(0, 1, 2, 0)$ e successivamente $(5, -4, 2, -5)$ (ortogonale a entrambi). La base ortonormale così trovata è:
 $(1, 0, 0, 1)/\sqrt{2}$ $(0, 1, 2, 0)/\sqrt{5}$ $(5, -4, 2, -5)/\sqrt{70}$
- c. Lo spazio U ha dimensione 3. Una base ortonormale per U si trova come per W ed è
 $(1, 0, -1, 0, 0)/\sqrt{2}$ $(0, 0, 0, 2, 1)/\sqrt{5}$ $(5, 5, 5, 2, -4)/\sqrt{95}$
- d. Calcoliamo innanzitutto la dimensione di Z scrivendo la matrice delle coordinate dei vettori che lo generano e riducendola. La matrice ha caratteristica 2 e quindi $\dim(Z) = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ R_4 \rightarrow R_4 - R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{La matrice ha caratteristica 2 e quindi} \\ \dim(Z) = 2. \text{ Come base di } W \text{ conviene} \\ \text{scegliere } (1, 1, 0, 1), (0, -1, 1, 1) \text{ in quanto} \\ (1, 1, 0, 1) \cdot (0, -1, 1, 1) = 0 \end{matrix}$$

A questo punto per avere una base ortonormale per Z basta normalizzare i due vettori:

$$(1, 1, 0, 1)/\sqrt{3}, (0, -1, 1, 1)/\sqrt{3}$$

MATRICI SIMMETRICHE E TEOREMA SPETTRALE

11. Moltiplichiamo A per il vettore $(2, -1, 0)$ (trasposto). Otteniamo $(6, -3, 0)$, quindi il vettore è autovettore e l'autovalore è 3.
 Analogamente moltiplicando A per il vettore $(0, 1, 1)$ si ottiene $(0, 3, 3)$ e l'autovalore è sempre 3.
 L'autospazio V_3 non può avere dimensione 3, perché in tal caso coinciderebbe con $\mathbb{R}^3$ e ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ sarebbe autovettore, cosa evidentemente non vera. Quindi V_3 ha dimensione 2 perché contiene due vettori linearmente indipendenti.
 Ci devono essere pertanto un altro autovalore e un altro autospazio.
 Dato che A è simmetrica, l'altro autospazio deve essere ortogonale a V_3 , quindi un suo autovettore (x, y, z) deve essere tale che $(x, y, z) \cdot (2, -1, 0) = 0$ e $(x, y, z) \cdot (0, 1, 1) = 0$. Una soluzione non nulla del sistema lineare è per esempio $(1, 2, -2)$ e effettivamente moltiplicando A per il vettore $(1, 2, -2)$ (trasposto) otteniamo $(6, -12, 12)$, quindi l'altro autovalore è 6.
12. a. Dato che A ha caratteristica 1 e quindi determinante 0, allora un suo autovalore è 0. Esso ha molteplicità 2, perché l'autospazio ha dimensione 2, dato che $\rho(A) = \rho(A - 0I) = 1$.
 L'autospazio è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato ad A che si può ridurre subito alla sola equazione $-x + 2y - z = 0$. Le soluzioni sono $(2y - z, y, z)$ ($y, z \in \mathbb{R}$).
 Una base per V_0 è $(2, 1, 0)$, $(-1, 0, 1)$, ma non è ortogonale. Per avere una base ortogonale, scegliamo come primo vettore $(2, 1, 0)$ e, come secondo, un vettore di V_0 , e cioè del tipo $(2y - z, y, z)$, ortogonale a $(2, 1, 0)$, cioè tale che $(2y - z, y, z) \cdot (2, 1, 0) = 0$ per esempio $(-1, 2, 5)$. Una base ortonormale per V_0 è quindi per esempio $(2, 1, 0)/\sqrt{5}$, $(-1, 2, 5)/\sqrt{30}$.
 Per quanto riguarda l'altro autovalore λ , occorrerebbe determinarlo e risolvere il sistema omogeneo associato ad $A - \lambda I$, ma si può usare il fatto che $V_\lambda \perp V_0$ e cercare un vettore ortogonale sia a $(2, 1, 0)$ che a $(-1, 2, 5)$, per esempio $(1, -2, 1)$. Moltiplichiamo A per il vettore $(1, -2, 1)$

(trasposto). Otteniamo $(-6, 12, -6)$, quindi l'autovalore λ è -6 e una base ortonormale per V_{-6} è $(1, -2, 1)/\sqrt{6}$. Una base ortonormale di autovettori è allora:

$$(2, 1, 0)/\sqrt{5} \quad (-1, 2, 5)/\sqrt{30} \quad (1, -2, 1)/\sqrt{6}$$

b. Usando la base ortonormale trovata sopra, come matrici P e D possiamo scegliere

$$P = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & -2/\sqrt{6} \\ 0 & 5/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

13. A. Il polinomio caratteristico di A è $x(x-3)(x+2)$. Gli autospazi si calcolano al solito modo e sono: $V_0 = L\{(1, 1, -2)\}$ $V_3 = L\{(1, 1, 1)\}$ $V_{-2} = L\{(1, -1, 0)\}$

Dato che i tre autospazi hanno tutti dimensione 1, i tre vettori sono automaticamente a due a due ortogonali. Per avere una base ortonormale di autovettori, basta solo normalizzarli. La base è

$$(1, 1, -2)/\sqrt{6} \quad (1, 1, 1)/\sqrt{3} \quad (1, -1, 0)/\sqrt{2}.$$

La matrice ortogonale P ha già determinante 1 per cui non occorrono ulteriori aggiustamenti:

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/2 \\ -2\sqrt{6}/6 & \sqrt{3}/3 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

B. Il polinomio caratteristico è $(x+1)^2(x-5)$. Gli autospazi sono:

$$V_5 = L\{(1, 2, -1)\} \quad V_{-1} = \{(x, y, z) : x + 2y - z = 0\}$$

Occorre una base ortonormale per ciascuno di essi:

Per quanto riguarda V_5 , basta solo normalizzare il generatore. Si ottiene $(1, 2, -1)/\sqrt{6}$.

Scegliamo un vettore di V_{-1} , per esempio $(1, 0, 1)$, poi cerchiamo un secondo vettore di V_{-1} ortogonale al primo, cioè (x, y, z) tale che $x + z = 0$ e $x + 2y - z = 0$, per esempio $(-1, 1, 1)$.

Adesso basta normalizzare i due vettori e si ottiene: $(1, 0, 1)/\sqrt{2}$, $(-1, 1, 1)/\sqrt{3}$. Ora possiamo scrivere P e D :

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si è dovuto cambiare segno alla prima colonna di P affinché P abbia determinante positivo (e quindi sarà 1).

C. Non è necessario calcolare il polinomio caratteristico, perché evidentemente C ha caratteristica 1 e cioè determinante 0, quindi 0 è autovalore. Inoltre V_0 è definito dall'equazione $x + 2y - z + t = 0$, quindi V_0 ha dimensione 3 (e pertanto 0 ha molteplicità 3).

Per quanto riguarda l'altro autovalore, dato che l'autospazio è ortogonale a V_0 , allora i coefficienti dell'equazione che definisce V_0 forniscono l'autovettore $(1, 2, -1, 1)$. Dato che moltiplicando A per il vettore $(1, 2, -1, 1)$ (trasposto) si ottiene $(7, 14, -7, 7)$, allora l'autovalore è 7. Si può calcolare al solito modo una base ortogonale per V_0 . Una è per esempio $(2, -1, 0, 0)$, $(1, 2, 5, 0)$, $(1, 2, -1, -6)$. Per avere una base ortonormale basta solo normalizzarli. Inoltre $V_7 = L\{(1, 2, -1, 1)\}$

Ora si scrive P , ma affinché abbia determinante 1 occorre cambiare segno al vettore della base di V_7 .

$$P = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{42} & -1/\sqrt{7} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & 2/\sqrt{42} & -2/\sqrt{7} \\ 0 & 5/\sqrt{30} & -1/\sqrt{42} & 1/\sqrt{7} \\ 0 & 0 & -6/\sqrt{42} & -1/\sqrt{7} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

14. A. Come nella matrice C dell'esercizio precedente, $\lambda = 0$ è autovalore e l'autospazio relativo è definito dall'equazione $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$, quindi V_0 ha dimensione $n - 1$ e $\lambda = 0$ ha molteplicità $n - 1$. Una sua base è per esempio

$$(1, -1, 0, \dots, 0), (0, 1, -1, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1, -1, 0), (0, \dots, 0, 1, -1).$$

È anche chiaro che $(1, 1, 1, \dots, 1)$ è autovettore dato che $\varphi(1, 1, 1, \dots, 1) = (n, n, n, \dots, n)$ e che quindi n è l'altro autovalore, con molteplicità 1. Occorre però una base ortogonale per V_0 . La più semplice è per esempio la seguente, ottenuta partendo col primo vettore e sostituendo i successivi via via con vettori ortogonali a tutti i precedenti.

$$(1, -1, 0, \dots, 0), (1, 1, -2, \dots, 0), (1, 1, 1, -3, 0, \dots) \text{ etc.}$$

Per avere una base ortonormale basta solo normalizzarli.

$(1, -1, 0, \dots, 0)/\sqrt{2}$, $(1, 1 - 2, \dots, 0)/\sqrt{6}$, $(1, 1, 1, -3, 0, \dots)/\sqrt{12}$ etc.

Una base ortonormale di V_n è evidentemente $\sqrt{n}/n(1, 1, 1, \dots, 1)$. Ora è immediato scrivere P e si vede subito che $\det(P) > 0$, quindi $\det(P) = 1$.

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & \dots & 1/\sqrt{n} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & \dots & 1/\sqrt{n} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & \dots & 1/\sqrt{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\sqrt{n} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$$

- B. Dato che $B = A - I$, gli autovalori di B si hanno sottraendo 1 a quelli di A e sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = n - 1$ con la stessa molteplicità e cioè rispettivamente $n - 1$ e 1.

Gli autospazi sono gli stessi identici trovati al punto precedente e così pure le basi ortonormali e la matrice P . La matrice D è invece quella a lato.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n - 1 \end{pmatrix}$$

FORME QUADRATICHE

21. a. La forma è

$$Q(x, y, z, t) = [x \ y \ z \ t] \cdot A \cdot [x \ y \ z \ t]^T = x^2 + y^2 + 4xy + 2z^2 + 2t^2 + 2zt.$$

- b. Dato che la matrice è a blocchi, il polinomio caratteristico di A è il prodotto dei polinomi caratteristici dei singoli blocchi. Il polinomio è $((x - 3)(x + 1)) \cdot ((x - 3)(x - 1))$. Avendo autovalori sia positivi che negativi, la forma è non definita.

- c. Dato che gli autovalori di A sono $-1, 1, 3$, gli autovalori di $A + \alpha I$ sono $-1 + \alpha$, $1 + \alpha$, $3 + \alpha$. La matrice è definita positiva se sono tutti e tre positivi, cioè se $\alpha > 1$ e $\alpha > -1$ e $\alpha > -3$. In definitiva, se $\alpha > 1$.

22. La forma matriciale di Q è: $Q(x, y, z) = (x \ y \ z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & k \\ 0 & k & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Riduciamo la matrice A per righe e per colonne

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & k \\ 0 & k & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \\ C_2 \rightarrow C_2 - R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & k & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 \rightarrow R_3 - kR_2 \\ C_3 \rightarrow C_3 - kC_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 - k^2 \end{pmatrix}$$

Per il teorema di Sylvester gli autovalori di A hanno gli stessi segni di $1, 1, 3 - k^2$. In conclusione:

Se $-3 < k < 3$ la forma è definita positiva.

Se $k = \pm 3$ la forma è semidefinita positiva.

Se $k < -3$ o $k > 3$ la forma è indefinita.

23. a. Si ha: $Q(x, y, z) = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} \boxed{k} & \boxed{3} & 0 \\ \boxed{3} & \boxed{k} & 4 \\ 0 & 4 & \boxed{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

- b. I minori principali sono i determinanti delle tre matrici incorniciate e devono essere tutti positivi, cioè si deve avere:

$$k > 0 \quad k^2 - 9 > 0 \quad k^3 - 25k > 0$$

La prima condizione $k > 0$, implica subito che la seconda sia $k > 3$ e che la terza sia $k^2 > 25$, cioè $k > 5$.

In definitiva, A è definita positiva solo se $k > 5$.

24. A. Riduciamo A per righe e per colonne in modo da determinare una matrice diagonale avente una diagonale con gli stessi segni degli autovalori di A .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \\ R_2 \rightarrow R_2 - R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k - 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_3 \rightarrow C_3 - C_1 \\ C_2 \rightarrow C_2 - C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k - 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché a_{22} dipende da k , conviene scambiare R_2 con R_3 e quindi C_2 con C_3 per continuare la

riduzione:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & k-1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_3 \rightarrow R_3 + R_1 \\ C_3 \rightarrow C_3 + C_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

L'ultima matrice, per il teorema di inerzia di Sylvester, ha tre autovalori dello stesso segno di 1, 1 e $a - 2$. In conclusione:

- Se $k > 2$, A ha tre autovalori positivi, quindi A è definita positiva.
- Se $k = 2$, A ha due autovalori positivi e uno nullo, quindi A è semidefinita positiva.
- Se $k < 2$, A ha due autovalori positivi e uno negativo, quindi A è non definita.

B. Eseguiamo su B l'algoritmo gaussiano per righe e per colonne per determinare una matrice diagonale avente una diagonale con gli stessi segni degli autovalori di B . Iniziamo con $R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$ (e $C_2 \rightarrow C_2 - 2C_1$) e poi $R_3 \rightarrow R_3 - R_1$ (e $C_3 \rightarrow C_3 - C_1$).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k-8 & k-6 \\ 0 & k-6 & k-2 \end{pmatrix}$$

Se $k = 8$, si esegue $R_1 \leftrightarrow R_2$ e $C_1 \leftrightarrow C_2$ e con $R_3 \rightarrow R_3 - (1/3)R_2$ (e di conseguenza anche $C_3 \rightarrow C_3 - (1/3)C_2$) si ottiene alla fine la matrice a lato

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2/3 \end{pmatrix}$$

La matrice ottenuta B ha quindi autovalori dello stesso segno di quelli di B , quindi B ha due autovalori positivi e uno negativo.

Se $k \neq 8$, si continua con $R_3 \rightarrow R_3 - ((k-6)/(k-8))R_2$ e con $C_3 \rightarrow C_3 - ((k-6)/(k-8))C_2$ ottenendo la matrice a lato

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & (2k-20)/(k-8) \end{pmatrix}$$

Possiamo ora usare il teorema di Sylvester e concludere:

- Se $k > 10$ ci sono tre autovalori positivi, quindi B è definita positiva.
- Se $k = 10$ ci sono due autovalori positivi e uno nullo, quindi B è semidefinita positiva.
- Se $8 < k < 10$ ci sono due autovalori positivi e uno negativo, quindi B è non definita.
- Se $k \leq 8$ ci sono due autovalori positivi e uno negativo, quindi B è non definita.

25. A titolo di esempio vengono usati diversi criteri per determinare i caratteri di definizione, lavorando, se necessario, sulla matrice associata alla forma quadratica tramite la base canonica.

- Gli autovalori della matrice associata sono 0, $1/2$, $3/2$. Quindi la forma è semidefinita positiva.
- Si scrive anche come $(x+y)^2 + z^2$ ed è quindi semidefinita positiva.
- Gli autovalori della matrice associata sono 0, $1/2$, $-1/2$. Quindi la forma è non definita.
- Gli autovalori della matrice associata sono 1, $-1/2$, $1/2$. Quindi la forma è non definita.
- Gli autovalori della matrice associata sono -1 , 3, 0. Quindi la forma è non definita.
- Il polinomio caratteristico della matrice associata è $(x-1)(x^2 - x - 1/4)$. Un autovalore è 1 e si vede subito che l'equazione di secondo grado ha due soluzioni di segno opposto. Quindi la forma è non definita.

g. La matrice associata è $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. I tre minori principali della matrice sono tutti positivi e, per il criterio dei minori principali, ciò basta a garantire che essa è definita positiva.

h. Il polinomio caratteristico della matrice associata è $x^3 - 6x^2 + 6x + 7$ e ha due variazioni e una permanenza, quindi, per la regola di Cartesio, ha due autovalori positivi e uno negativo perciò è non definita.

i. È non definita dato che, per esempio, $Q(1, 0, 0) = 1$ e $Q(0, 0, 1) = -1$.

26. Eseguito il prodotto di matrici si trova $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + y^2 + z^2$. Dato che si può scrivere $Q(x, y, z) = (x+y)^2 + z^2$, allora Q è semidefinita positiva. Osserviamo che Q è associata alla matrice *simmetrica* a lato.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

FUNZIONI E SCRIPT IN MATLAB

01. `function p=alfa(x)
r1=x:x+10;
M=eye(9);
N=ones(9,2)*x;
rn=r1.^2;
m=[r1;M,N;rn];
[p,d]=eig(m'*m);`

La matrice **p** esiste in quanto la matrice $m^T m$ è una matrice simmetrica.

02. `function x=alfa(n)
v=n:-1:1;
for id=1:n
 m(id,:)=v;
end
p1=[eye(n)*n,m;ones(n)*n,zeros(n)];
p=eye(2*n)+p1;
x=p\ (1:2*n)';`

03. `function b=alfa(x,y)
r1=[2,x+2:2:x+20];
c1=(x+2:2:x+20)';
M=diag(y:-1:y-9);
N=M+ones(10)-eye(10);
a=[r1;c1,N];
if det(a)~=0
 b=inv(a);
else
 b=zeros(size(a));
end`

04. `function m=alfa(x)
[r,c]=size(x);
if r~=1
 error('x non matrice riga')
end
a=[x,0;eye(c),x'];
s=eig(a+a');
m=diag(s);`

05. `function x=alfa(v)
n=length(v);
w=(v(2:n))';
b=[v;w, diag(w)];
b(:,n)=ones(n,1)*v(n);
if det(b)~=0
 x=b\ones(n,1);
else
 x=zeros(n,1);
end`

06.

```
function a=alfa(v)
[r,c]=size(v);
if r>1 & c==1
    v=v';
end
if r>1 & c>1
    v=v(1,:);
    warning('v ha più di una riga, verrà usata solo la prima')
end
n=length(v);
di=n:-1:1;
di1=1./di;
d=diag(di1);
a=v*v'+d;
```

07.

```
function b=alfa(a)
[r,c]=size(a);
if r==c
    b=[a,a';diag(1:r), zeros(r)];
else
    b=[a,eye(r);diag(1:c),a'];
end
```

08.

```
function b=alfa(v)
[r,c]=size(v);
if r>1 & c>1
    b=eig(v*v');
    return
end
if r>1 & c==1
    v=v';
end
n=length(v);
v1=[v(2:n),v(1)];
m=[v;v1;eye(n-2),zeros(n-2,2)];
b=eig(m*m');
```

09.

```
function b=alfa(a,b,n)
c1=(a:a+n-1)';
c2=(b+n-1:-1:b)';
M=ones(2,n-2)*a;
N=eye(n-2)*b;
b=[c1,c2,[M;N]];
```

10.

```
function b=alfa(a)
x=0:.1:2;
y=(a+x)./(x.^2+1);
b=[x',y'];
plot(x,y)
shg
```

11.

```
function a=alfa(n)
if n<4 | fix(n)~=n
    error('n non valido')
end
r1=2:2:2*n;
r2=n:-1:1;
M=eye(n-2)*pi;
N=exp(1)*ones(n-2,2);
a=[r1;r2;M,N];
```

12.

```
function a=alfa(n)
if n>=3
    m=floor(n);
else
    m=floor(6-n);
end
r1=m:-1:1;
M=eye(m-1);
cn=( (2:m).^2)';
a=[r1;M,cn];
a(m,1)=n;
```

13.

```
function a=alfa(x)
[r,n]=size(x);
if r~=1
    a=x;
    warning('x non vettore riga')
    return
end
r1=x;
r2=[x(3:n),x(1:2)];
r3=x(n:-1:1);
M=zeros(n-3,3);
N=ones(n-3)*n;
N1=tril(N);
a=[r1;r2;r3;M,N1];
```

14.

```
function flag=alfa(x,n)
r1=1:n;
a=[x.^r1;n*ones(n-1,1),eye(n-1)];
r=eig(a);
flag=1;
for id=1:n
    if real(r(id))~=r(id)
        flag=0;
    end
end
```

15. `function b=alfa(z,n)`
`if n~=fix(n) | n<4`
`error('n non valido')`
`end`
`v=z:z+n-1;`
`a=2*(v'*v)/norm(v)-eye(n);`
`b=a(1:4,1:4);`

`for z=0:.1:5`
`b=alfa(z,5);`
`x=b\[1,1,1,1]';`
`if norm(x)>1`
`disp(x)`
`end`
`end`

16. `function b=alfa(x,n)`
`if n<3`
`error('n minore di 3')`
`end`
`if n~=fix(n)`
`n=fix(n);`
`end`
`r1=n:-1:1;`
`c1=(n-1:-1:2)';`
`M=ones(n-2)*x;`
`cn=(2:n-1)';`
`rn=1:n;`
`b=[r1;c1,M,cn;rn];`

`for x=0:.1:5`
`b=alfa(x,5);`
`s=eig(b);`
`lambda=max(s);`
`if abs(lambda)>10 & abs(lambda)<12`
`disp(lambda)`
`end`
`end`

17. `function c=alfa(x,n)`
`r1=x-(0:0.1:(n-1)/10);`
`r2=r1.*exp(r1);`
`b=[r1;r2];`
`c=b'*b+eye(n);`

`ris=Inf;`
`for id=0:0.1:3`
`c=alfa(id,5);`
`d=det(c);`
`if d<ris`
`ris=d;`
`c1=c;`
`end`
`end`
`disp(c1)`

```

18. for k=-3:0.1:3
    a=[2,2,k;2,3,k^2-2;k,k^2-2,3];
    d=eig(a);
    flag=1;
    for id=1:3
        if d(id)<0
            flag=0;
        end
    end
    if flag==1
        disp(k)
    end
end

```

La funzione è continua, quindi per il secondo pezzo si può evitare di ricalcolarla nel punto 1

```

x1=0:.1:1;
x2=1.1:.1:2;
y1=(x1+1)./(x1.^2+1);
y2=exp(1-x2^2);
x=[x1,x2];
y=[y1,y2];
plot(x,y)

```

```

19. function v=alfa(a,n)
    [r,c]=size(a);
    if r~=1 | c~=1
        error('a non scalare')
    end
    [r,c]=size(n);
    if r~=1 | c~=1
        error('n non numero')
    end
    if n~=fix(n) | n<4
        error('n non valido')
    end
    v(1)=a;
    for id=2:n
        v(id)=v(id-1)^2-1;
    end
end

```

```

20. function u=alfa(v,w)
    [rv,nv]=size(v);
    if rv~=1
        error('v non vettore riga')
    end
    [rw,nw]=size(w);
    if rw~=1
        error('w non vettore riga')
    end
    if norm(v)==0 | norm(w)==0
        error('uno dei vettori è nullo')
    end
    n=min(nv,nw);
    v1=v(1:n);
    w1=w(1:n);
    u=v1/norm(v1)+w1/norm(w1);
end

```